MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

1. Matemáticas

Las matemáticas surgen de la necesidad del ser humano por entender y solucionar los diversos problemas que surgen en su entorno, desde la repartición de bienes, ventas, conteo de animales, etc.

Los primeros números surgieron hacia el año 3,000 a.C. mediante la abstracción de los objetos que se contaban. Ya en el 1,650 a.C. existe un importante tratado en el que se hace todo tipo de afirmaciones y deducciones matemáticas, esto se hace constar en el Papiro de Rhind, el cual se cree fue escrito por Ahmes.

1.1 Definición de matemáticas

De acuerdo al Diccionario de la lengua española (DRAE), la matemática es definida como:

(Del lat. mathematĭca, y este del gr. τὰ μαθηματικά, der. de μάθημα, conocimiento).

1. f. Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones. U. m. en pl. con el mismo.

Otros autores la definen como …

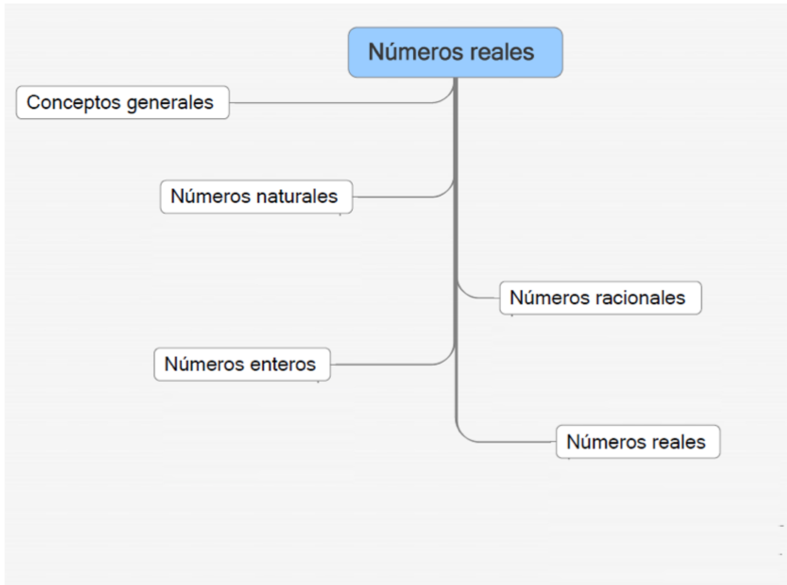
René Descartes: "La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles."

María Moliner: Ciencia que trata de las relaciones entre las cantidades y magnitudes y de las operaciones que permiten hallar alguna que se busca, conociendo otras.

Galileo Galilei: "Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo". "Las matemáticas son el lenguaje de la naturaleza"

1.2 Sistemas numéricos

Para el estudio de los diferentes clases de números partiremos del siguiente esquema:



El primer encuentro con los números surge de la necesidad de cuantificar mediante los números naturales, que son un conjunto infinito, formado por los símbolos: { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...}. En esta cuantificación, para disminuir se agregan los números enteros: {... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...}. Este conjunto de símbolos se obtiene a partir de los números naturales añadiendo los opuestos para la operación suma.

En esta evolución, el siguiente paso es particionar, de este modo surgen los números racionales. Los números racionales se obtienen a partir de los enteros añadiendo los inversos multiplicativos.

Los números que no admiten una representación como racionales, es decir, que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros se denominan números irracionales, por ejemplo el número π

Por último, la unión de los números racionales con los irracionales define al conjunto de los números reales.

Números Naturales

Los números naturales se presentan en todas las actividades del ser humano, y se definen como cualquiera de los números que permiten contar los elementos de un conjunto. Como se indicó, este conjunto está formado por los símbolos: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...} y se denota por la letra $\mathbb{N}$.

Un número natural es **primo** si es mayor que 1 y sólo es divisible por sí mismo y por la unidad. En otras palabras, un número primo no puede ser construido del producto de dos números distintos de él y de la unidad;

Números Enteros

Con respecto a los números naturales, los números enteros son una ampliación de este conjunto, agregando los números que son el resultado de restar a un número natural otro mayor. Así, los números enteros que se denotan por $\mathbb{Z}$, se definen como el conjunto formado por los números: {...-4,-3,-2,-1, 0,1, 2, 3, 4,...}. Algunos números enteros son: 123, -456, 7, -8 y 10.

Operaciones fundamentales y sus propiedades

En $\mathbb{Z}$ se tienen dos operaciones:

- $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que se denomina suma (o adición)
- $\bullet : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ que se denomina producto (o multiplicación).

Estas operaciones son cerradas, es decir, el resultado de cualquiera de ellas vuelve a ser un número entero. Además, + y • cumplen las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: a + b = b + a y a•b = b•a, para cada $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Asociatividad: a+(b+c) = (a+b)+c y a(b•c) = (a•b)c, para cada $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
- Existencia de elemento neutro: Existen los elementos 0 y 1 tales que a + 0 = a y a•1 = a, para cada $a \in \mathbb{Z}$.
- Existencia de inversos aditivos: Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe un único $-a \in \mathbb{Z}$, tal que a+(-a)=0.
- Ley de cancelación: Para cada $a, b, c \in \mathbb{Z}, con\ a \neq 0$, si a•b=a•c entonces b = c.

En los números enteros se establece la relación de orden: "menor que (<)" y "mayor que (>)", de tal forma que para a, b dos enteros cualquiera, a es menor que b o mayor que si existe un número natural , tal que , a+c=b y se denota por: ” a<b o a>b ”.

Números Racionales

El concepto de divisibilidad se establece a partir de los números enteros, y es básico en la definición de los números racionales. Dados dos números enteros a, b (con $b \neq 0$) se dice que b divide a a, lo que se denota como a/b, si existe un entero c, tal que bc=a.

Con la definición anterior, y como ya se ha descrito, los números racionales son aquellos que resultan de un cociente entre dos números enteros; de manera intuitiva, provienen de la necesidad de cuantificar una parte de un todo; la letra $\mathbb{Q}$ denota a este conjunto: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Operaciones fundamentales y sus propiedades

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en los números racionales son cerradas, es decir, el resultado de una operación con cualquier par de números racionales dará como resultado un racional. El siguiente teorema determina la manera en la que se deben operar los números racionales. Sean a/b y c/d números racionales con $b \neq 0 \; y \; c \neq 0.$ Entonces:

- $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ac}{bd}\right)$
- $\left(\frac{ad}{bd}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$
- $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \; Si \; y \; sólo \; si \; ad = bc$
- $\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ad+cb}{bd}\right)$

Números Irracionales

¿Cuál es la relación entre la longitud de una circunferencia cualquiera con su diámetro?, ¿cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado unitario?

Para resolver este tipo de problemas que no admiten una representación del número racional con números de decimales finitos o periódicos, es necesario ampliar el concepto de número a otro conjunto denominado: números irracionales.

Entonces, para la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro se tiene al número irracional denominado “pi”, que se denota por “π” y tiene un valor aproximado de: 3.1416225551551514

En el segundo planteamiento, y aplicando el teorema de Pitágoras, un valor de la diagonal de un cuadrado unitario está dado por: $\sqrt{2}$ para el cual se tiene la siguiente aproximación: $\sqrt{2} = 1.41421356$

Números Reales

El conjunto de los números reales resulta de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Pero, ¿cuál es el conjunto de los números irracionales? Para responder esta interrogante, se analizarán las siguientes situaciones, así como la necesidad de los números irracionales.

Operaciones fundamentales y sus propiedades

Con el enfoque axiomático, se establece que el sistema de los números reales es un conjunto que se denota por $\mathbb{R}$, que contiene más de un elemento y tiene dos operaciones básicas: adición (denotada por +) y multiplicación (denotada por •), que cumplen los siguientes axiomas:

- Conmutativo: a + b = b + a y ab = ba, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
- Asociativo: a+(b+c) = (a+b) + c y a(bc) = (ab)c, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Distributivo:a(b+c)=(ab)+(ac)y(b+c)a=(ba)+(ca), para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Existencia de elemento neutro: Existen los elementos 0 y 1, tales que a + 0 = a y a 1 = a, para cada $a \in \mathbb{R}$.
- Existencia de inversos:
  - Aditivos, para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un único $-a \in \mathbb{R}$ tal que a + (-a) = 0.
  - Multiplicativos, para cada $a \in \mathbb{R}$ distinto de cero, existe un único elemento denominado el inverso multiplicativo denotado por $a^{-1} o \ \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $(a)(a^{-1}) = 1$.

Finalmente, se enuncian algunas de las propiedades de los números reales:

- Ley de cancelación del producto: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, si ab = ac, entonces b = c.
- Ley de cancelación de la suma: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, si a + b = a + c, entonces b = c.
- Relación de orden: En el conjunto de los números reales hay una relación de orden que extiende la relación de orden de los números naturales, enteros, racionales e irracionales.
- Valor absoluto: El valor absoluto de un número real a, es el número real no negativo, y como se ha descrito su notación es: |a|.
- Distancia entre dos reales: La distancia entre a y b números reales, es el número real no negativo dado por el valor absoluto de su diferencia: |a−b|.
- Desigualdad triangular: Si a y b son dos números reales cualquiera, se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ denominada desigualdad triangular.
- Sustracción: Si a y b son números reales, entonces “a menos b” a – b = a +(-b).
- División: Si a y b son números reales con $b \neq 0$, entonces “a entre b” $\frac{a}{b} \ o \ (a)(b^{-1})$.
- Ley de los signos: La multiplicación y la división de dos números reales distintos de cero es un número positivo si ambos tienen el mismo signo, y es un número negativo si tienen diferente signo.

1.3 Referencias

Astorga, Alcides (1984) La Función Exponencial y la Función Logarítmica. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Costa Rica.

Becerra, Manuel. (2011). Ley de exponentes y logaritmos. Facultad de Contaduría y Administración. UNAM. México, Distrito Federal.

Rico, Carlos. (2012). Álgebra. RED TERCER MILENIO S.C. Estado de México, México.